Základní radiometrické veličiny

Radiometrické veličiny se v textech, se kterými jsem se setkal, zavádějí velmi formálně, např. iradiance $E = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A}$. Pokusil jsem se přesněji popsat, co jednotlivé funkce znamenají. Formální zápisy jsou zde nahrazeny přesně formulovanými limitami. Tato práce v úvodních textech k radiometrii obvykle chybí.

Nesvětelný úvod

Na názorné fyzikální veličině „rychlosti" si podrobně ukážeme význam limitního přechodu, který se v různých obměnách bude často v tomto textu používat. Sledujme bod pohybující se po přímce. V čase t je bod v místě $s(t)$. Derivací funkce s podle t (pokud existuje) dostáváme okamžitou rychlost

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t) - s(t+h)}{h} = \lim_{\substack{t_2 - t_1 \to 0 \\ t_1 < t_2,\ t \in \langle t_1, t_2 \rangle}} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Nechť $\mathcal{I}$ je množina všech intervalů na $\mathbf{R}$. Uvažujme funkci $D : \mathcal{I} \to \mathbf{R}$, která pro každý časový interval $\langle t_1, t_2 \rangle$ vrátí vzdálenost, kterou sledovaný bod během daného časového intervalu urazil. Přesněji $D(\langle t_1, t_2 \rangle) = s(t_2) - s(t_1)$. Funkce D sice neobsahuje informaci o okamžité poloze bodu v čase t, ale okamžitou rychlost můžeme z této funkce stále počítat:

$$v(t) = \lim_{\substack{t_2 - t_1 \to 0 \\ t_1 < t_2,\ t \in \langle t_1, t_2 \rangle}} \frac{D(\langle t_1, t_2 \rangle)}{t_2 - t_1} = \lim_{\substack{d\langle t_1, t_2 \rangle \to 0 \\ t \in \langle t_1, t_2 \rangle}} \frac{D(\langle t_1, t_2 \rangle)}{\mu\langle t_1, t_2 \rangle} = (\text{formálně}) = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}(t).$$

Symbolem $\mu\langle t_1, t_2 \rangle$ je označena velikost intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Symbolem $d\langle t_1, t_2 \rangle$ je také označena velikost intevalu. Tyto dvě funkce se začnou lišit až u množin s vyšší dimenzí než jedna.

Vidíme, že D je funkcí intervalu (ne reálného čísla) a obsahuje veškeré informace pro výpočet okamžité rychlosti a nic navíc. Obráceně, ze znalosti okamžité rychlosti v každém čase t můžeme spočítat hodnotu funkce D pro každý interval:

$$D(\langle t_1, t_2 \rangle) = \int_{\langle t_1, t_2 \rangle} v(t)\, \mathrm{d}t.$$

Ukazuje se, že je účelnější při studiu některých fyzikálních veličin pracovat s reálnými funkcemi intervalu, křivky, plochy, objemu, atd. Tyto funkce se chovají jako speciální míry uvedených množin.

Uvedeme ještě jeden příklad. Nechť $\mathcal{Q}$ je množina všech „kvádrů" tvaru $q = i_1 \times i_2 \times i_3$, kde i_1, i_2, i_3 jsou reálné intervaly. Uvažujme funkci $M : \mathcal{Q} \to \mathbf{R}$, jejíž hodnota pro daný kvádr q je hmotnost části tělesa vymezené kvádrem q. Označme ještě

$$d(q) = \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in q} \|\vec{x} - \vec{y}\|,$$

tedy vzdálenost dvou nejvzdálenějších bodů množiny q, neboli průměr množiny q. Dále $\mu(q)$ značí objem množiny q. Pak můžeme počítat hustotu v bodě $\vec{x}$ a obráceně, funkci M můžeme určit z hustoty:

$$\varrho(\vec{x}) = \lim_{\substack{d(q) \to 0 \\ \vec{x} \in q}} \frac{M(q)}{\mu(q)} = (\text{formálně}) = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\vec{x}}, \qquad M(q) = \int_q \varrho(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x}.$$

Typicky tedy v limitě, která se často nahrazuje zápisem formální derivace, najdeme nějakou funkci intervalu, plochy, objemu atd. dělenou velikostí tohoto intervalu, plochy, objemu.

Vyšetřovaná funkce může mít i více proměnných, např. jedna proměná reprezentuje plochu, druhá interval, třetí prostorový úhel, atd.

V limitním přechodu vždy přechází průměr nějaké množiny d k nule za doplňující podmínky, že sledovaný bod v množině trvale leží. Má-li množina dimenzi jedna (interval), dělíme v limitním přechodu délkou intrervalu. Má-li množina dimenzi dva (plocha), dělíme velikostí plochy a má-li množina dimenzi tři (objem), dělíme velikostí objemu. Ve všech případech tuto míru množiny značíme stejně: μ.

Zavedení radiometrických veličin

Nechť S je plocha, tj. podmnožina v prostoru $\mathbf{R}^3$, která je obrazem nějaké spojité funkce

$$\varphi : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \mathbf{R}^3.$$

Parametrizace φ musí splňovat další vlastnosti, abychom mohli hovořit o ploše, ovšem v tomto textu stačí plochu chápat intuitivně. Po ploše mohou lézt dva mravenci, kteří se nikdy nepotkají, pokud nepřekonají okraj plochy. Jeden mravenec leze po „vnitřní“ a druhý po „vnější“ straně plochy. Normálový vektor v regulárním bodě plochy (kolmý na tečnou rovinu) vždy orientujeme tak, že směřuje od plochy ven a je viditelný z vnější strany plochy. Dvě množinově shodné plochy se mohou lišit tím, která strana plochy se považuje za vnitřní a která za vnější. Tím, že rozhodneme, která strana je která, jsme plochu orientovali.

Plocha může ale nemusí být ve scéně totožná s povrchem nějakého 3D tělesa nebo částí tohoto povrchu. Pokud je, pak plochu orinetujeme přirozeně tak, že vnější strana plochy směřuje vně tělesa a vnitřní strana dovnitř.

Označme $\mathcal{P}$ množinu všech orientovaných ploch a $\mathcal{I}$ bude množina všech časových intervalů. Uvažujme funkci $Q : \mathcal{P} \times \mathcal{I} \to \mathbf{R}$, jejíž hodnota vyjadřuje množství světelné energie, které dopadne na vnější stranu plochy za časový interval. Konkrétně zápisem $Q(S, \langle t_1, t_2\rangle)$ vyjadřujeme množství světelné energie, které dopadne na vnější stranu plochy S za časový interval $\langle t_1, t_2\rangle$. Fyzikální jednotkou energie Q je Joule [J].

Vzhledem k vlnové povaze světla je potřeba rozlišovat světelnou energii na různých vlnových délkách, nebo sečíst (integrálem) světelnou energii v určitém rozsahu vlnových délek. Při osvětlování modelované scény si ovšem vystačíme se zjednodušením tohoto problému: bude nám stačit uvažovat veškerou světelnou energii (tvoříme obraz ve stupních šedi, tj. sčítáme energii na všech viditelných vlnových délkách) nebo rozdělíme spektrum na barevné složky, například červenou, modrou, zelenou. S každou barvou pracujeme zvlášť. Rozlišujeme tedy funkci Q pro každou barevnou složku. V dalším textu už vlnová délka nebude kvůli zjednodušení uvažována.

Vzhledem k částicové povaze světla se hodí světelnou energii interpretovat jako počet fotonů násobený konstantou e (energií jednoho fotonu). Každý foton (na určité vlnové délce) je nositelem konstantní dále nedělitelné energie. Foton se vždy pohybuje přímočaře rovnoměrnou rychlostí c, dokud nenarazí na nějakou překážku. Z tohoto pohledu je Q množství fotonů, které dopadly na vnější stranu plochy S za časový interval $\langle t_1, t_2\rangle$. Toto množství samozřejmě násobíme kontantou e. Další osud fotonů po dosažení vnější strany plochy S není v tuto chvíli podstatný. Je-li S jen abstraktní plocha, která není povrchem žádného tělesa, pak fotony projdou plochou a dále pokračují v přímočarém pohybu. Je-li S povrchem, fotony mohou měnit směr svého pohybu nebo mohou zaniknout (přejít v jinou formu energie).

Částicový pohled na světelnou energii je užitečný, když si potřebujeme ujasnit směr šíření světelné energie (tj. směr pohybu fotonů). Matematický model ale využívá integrálů a derivací, tedy spojitou matematiku. Předpokládá se tedy, že je světelná energie dělitelná na libovolně malé části.

Světelný tok (flux) je hodnota funkce $\Phi : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$, která je definována jako

$$\Phi(S,t) = \lim_{\substack{d\langle t_1,t_2\rangle \to 0 \\ t\in\langle t_1,t_2\rangle}} \frac{Q(S,\langle t_1,t_2\rangle)}{\mu\langle t_1,t_2\rangle} = (\text{formálně}) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Světelný tok vyjadřuje celkový „otisk“ světelné energie na vnější straně plochy S v okamžiku t. Představit si to můžeme následovně: Po dobu jedné sekundy počítáme fotony, které dopadly na vnější stranu plochy a výsledek vynásobíme energií fotonu e. Pak upřesníme: počítáme fotony jen po dobu např. tisíciny sekundy a výsledek násobíme $1000e$. Pokud to nestačí, dále zkracujeme čas „závěrky“. Tím se blížíme k výše uvedené limitě.

Často se počítá osvětlení scén, ve kterých se světelné podmínky (tok) v čase nemění. Pak je uvedená limita rovna $\Phi(S,t) = Q(S,\langle 0,1\rangle)$, tj. popisuje množství energie dopadlé na vnější stranu plochy S za jednotkový časový interval (za jednotku času). Navíc funkce Φ je pak konstantní v proměné t, takže časovou proměnnou v takovém případě nebudeme používat. $\Phi(S)$ je tedy rovno množství světelné energie dopadlé na vnější stranu plochy S za jednotku času. Po dobu jedné sekundy tedy počítáme fotony dopadlé na vnější stranu plochy a výsledný počet vynásobíme konstantou e. Fyzikální jednotka světelného toku je Watt [Js^{-1}].

Kromě světelné energie dopadající na vnější stranu plochy bude potřeba měřit světelnou energii vyzářenou z vnější strany plochy (fotony, které opustily plochu) a dále bude potřeba často měřit jen energii, která odpovídá jen některým fotonům, které přicházejí z vymezeného prostorového úhlu nebo jsou vyzářeny do vymezeného prostorového úhlu. Je proto rozumné přidat funkci Φ kromě proměnné „typu plocha“ ještě proměnou „typu prostorový úhel“ U. Prostorový úhel je (neorientovaná) plocha na sféře, tedy souvislá množina směrů. Symbolem $\mathcal{U}$ označím množinu všech prostorových úhlů. Dále přidám k funkci Φ index, kterým rozliším, zda se jedná o přijatou nebo vyzářenou energii. Dostávám tak poněkud modifikované funkce Φ_i a Φ_r:

Světelný tok dopadající na plochu S **ze směrů** U je hodnota funkce $\Phi_i : \mathcal{P} \times \mathcal{U} \to \mathbf{R}$. Jmenovitě $\Phi_i(S, U)$ je množství energie dopadlé na vnější stranu plochy S ze všech směrů U za jednotku času. Směr pohybu každého započítaného fotonu je tedy opačný nějakému směru, který leží v U.

Světelný tok vyzářený plochou S **ve směrech** U je hodnota funkce $\Phi_r : \mathcal{P} \times \mathcal{U} \to \mathbf{R}$. Jmenovitě $\Phi_r(S, U)$ je množství energie vyzářené vnější stranou plochy S do všech směrů U za jednotku času. Směr pohybu každého započítaného fotonu je nyní souhlasný s nějakým směrem v U.

Množinu směrů U lze rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny. Na směry U_1, které jsou dosažitelné z vnější části plochy, a na zbytek U_2. Je zřejmé, že $\Phi_i(S, U) = \Phi_i(S, U_1)$, $\Phi_r(S, U) = \Phi_r(S, U_1)$, $\Phi_i(S, U_2) = 0$, $\Phi_r(S, U_2) = 0$.

Pokud se neomezujeme na určitou množinu směrů vyzářené nebo dopadající energie, stačí volit $U = \Omega$, kde Ω značí jednotkovou sféru. Kvůli stručnosti píšeme $\Phi_i(S, \Omega) = \Phi_i(S)$, $\Phi_r(S, \Omega) = \Phi_r(S)$.

V dalším textu budeme světelnou energii sledovanou na ploše a množině směrů „zaostřovat“ do bodu a do paprsku. Provedeme to limitním přechodem sledované plochy do bodu a/nebo vymezeného prostorového úhlu do konkrétního směru. Kdybychom tento přechod provedli jen v argumentech funkce Φ, dostaneme nulu. Vychází to například z představy, že pravděpodobnost, že existuje foton, který se strefí přesně do vybraného bodu nebo který má přesně zvolený směr, je nulová. Je tedy zřejmé, že v limitním přechodu bude potřeba dělit velikostí zmenšované plochy nebo velikostí zmenšovaného prostorového úhlu, abychom dostali smysluplnou fyzikální veličinu.

Zvolme plochu $P \in \mathcal{P}$ a nechť bod $\vec{x}$ leží na ploše P. **Intenzita ozáření (iradiance)** bodu $\vec{x}$ na ploše P je hodnota funkce $E : P \to \mathbf{R}$ definované

$$E(\vec{x}) = \lim_{\substack{d(S) \to 0 \\ \vec{x} \in S,\ S \subseteq P}} \frac{\Phi_i(S)}{\mu(S)} = (\text{formálně}) = \frac{\mathrm{d}\Phi_i}{\mathrm{d}S}. \tag{2}$$

Intenzita vyzáření (radiozita) bodu $\vec{x}$ na ploše P je hodnota funkce $B : P \to \mathbf{R}$ definované

$$B(\vec{x}) = \lim_{\substack{d(S) \to 0 \\ \vec{x} \in S,\ S \subseteq P}} \frac{\Phi_r(S)}{\mu(S)} = (\text{formálně}) = \frac{\mathrm{d}\Phi_r}{\mathrm{d}S}. \tag{3}$$

Takže iradiance je světelná energie přicházející se všech směrů (vnější strany plochy) k danému bodu $\vec{x}$ a radiozita je energie vyzářená bodem $\vec{x}$ do všech směrů vnější strany plochy. Fyzikální jednotka je $[\mathrm{Wm}^{-2}]$.

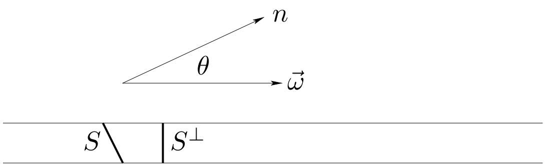
Je potřeba upozornit, že uvedené veličiny E a B jsou závislé na volbě plochy P. Hodnota $E(\vec{x})$ a $B(\vec{x})$ závisí na ploše P v ε-okolí bodu $\vec{x}$. Tuto závislost je třeba mít na paměti, i když ji do argumentů funkcí E a B nezapisujeme.

Následující veličina „intenzita záření plochy v daném směru“ se v literatuře nevyskytuje. Je zavedena pro účely tohoto textu jako mezistupeň mezi tokem Φ (závislost na množině směrů a celé ploše) a radiancí L (závislost na jediném směru a jediném bodě).

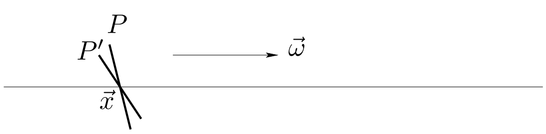
Intenzita záření plochy S **ve směru** $\vec{\omega}$ je hodnota funkce $I_r : \mathcal{P} \times \Omega \to \mathbf{R}$ definované

$$I_r(S, \vec{\omega}) = \lim_{\substack{d(U) \to 0 \\ \vec{\omega} \in U}} \frac{\Phi_r(S, U)}{\mu(U)} = (\text{formálně}) = \frac{\mathrm{d}\Phi_r}{\mathrm{d}\vec{\omega}}. \tag{4}$$

Fyzikální jednotka intenzity záření je $[\mathrm{W\,sr}^{-1}]$.



Obrázek 1



Obrázek 2

Na obrázku 1 se díváme z boku na „rovnou“ plochu S a sledujeme její intenzitu záření ve směru $\vec{\omega}$. Vidíme, že je v daném směru stejná, jako intenzita záření „rovné“ plochy $S^{\perp}$, která je kolmá na směr záření, pokud samozřejmě mezi S a $S^{\perp}$ není žádná překážka světla:

$$I_r(S, \vec{\omega}) = I_r(S^{\perp}, \vec{\omega}).$$

Zjevně platí $\mu(S^{\perp}) = \cos\theta\, \mu(S)$, kde θ je úhel mezi normálou plochy S a směrem $\vec{\omega}$. V následujícím limitním přechodu, kdy „světelný válec“ I_r přejde ve „světelný paprsek“ L_r (radiance bodu) se místo plochy S pracuje s plochou $S^{\perp}$, tedy s průmětem S, který je kolmý na směr $\vec{\omega}$. Tím bude zaručena nezávislost radiance na zvolené ploše.

Předpokládáme plochu $P \in \mathcal{P}$ a na ní regulární bod $\vec{x}$. **Zář (radiance) bodu $\vec{x}$ ve směru $\vec{\omega}$** je hodnota funkce $L_r : P \times \Omega \to \mathbf{R}$, která je definovaná pro $\vec{x} \in P$ a směr $\vec{\omega} \in \Omega$ takto:

$$L_r(\vec{x}, \vec{\omega}) = \lim_{\substack{d(S)\to 0 \\ \vec{x}\in S,\ S\subseteq P}} \frac{I_r(S^{\perp}, \vec{\omega})}{\mu(S^{\perp})} = \lim_{\substack{d(S)\to 0 \\ \vec{x}\in S,\ S\subseteq P}} \frac{I_r(S, \vec{\omega})}{\cos\theta\, \mu(S)} = (\text{formálně}) = \frac{\mathrm{d}I_r}{\cos\theta\, \mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}^2\Phi_r}{\cos\theta\, \mathrm{d}S \mathrm{d}\vec{\omega}}, \qquad (5)$$

zde θ je úhel mezi normálou plochy P v bodě $\vec{x}$ a směrem $\vec{\omega}$. Fyzikální jednotka záře je $[\mathrm{W\,m^{-1}\,sr^{-1}}]$.

Analogicky, jako vyzářená radiance L_r z bodu x ve směru $\vec{\omega}$ se definuje přijatá radiance L_i ze směru $\vec{\omega}$ v bodě $\vec{x}$:

$$L_i(\vec{x}, \vec{\omega}) = \lim_{\substack{d(S)\to 0 \\ \vec{x}\in S,\ S\subseteq P}} \frac{I_i(S, \vec{\omega})}{\cos\theta\, \mu(S)}, \qquad \text{kde } I_i(S, \vec{\omega}) = \lim_{\substack{d(U)\to 0 \\ \vec{\omega}\in U}} \frac{\Phi_i(S, U)}{\mu(U)},$$

formálně tedy:

$$L_i(\vec{x}, \vec{\omega}) = \frac{\mathrm{d}^2\Phi_i}{\cos\theta\, \mathrm{d}S \mathrm{d}\vec{\omega}}.$$

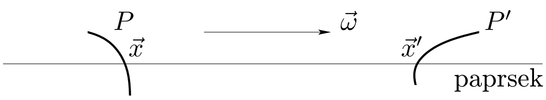
Je potřeba zdůraznit, že radiance bodu v daném směru není závislá na volbě plochy P. Kdybychom stejným bodem $\vec{x}$ proložili jinou plochu P', která má jinou normálu v bodě $\vec{x}$ (obrázek 2), pak se typicky stane, že

$$\lim_{\substack{d(S)\to 0 \\ \vec{x}\in S,\ S\subseteq P}} \frac{I_r(S, \vec{\omega})}{\mu(S)} \neq \lim_{\substack{d(S)\to 0 \\ \vec{x}\in S,\ S\subseteq P'}} \frac{I_r(S, \vec{\omega})}{\mu(S)},$$

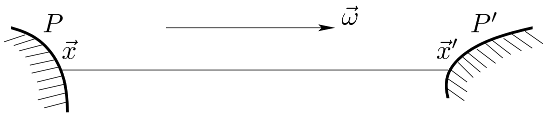
ale

$$L_r(\vec{x}, \vec{\omega}) = \lim_{\substack{d(S)\to 0 \\ \vec{x}\in S,\ S\subseteq P}} \frac{I_r(S, \vec{\omega})}{\cos\theta\, \mu(S)} = \lim_{\substack{d(S)\to 0 \\ \vec{x}\in S,\ S\subseteq P'}} \frac{I_r(S, \vec{\omega})}{\cos\theta'\, \mu(S)},$$

takže faktor $1/\cos\theta$ je možno vnímat jako „korekční“ koeficient, který zajistí, že veličina L je nezávislá na volbě plochy P. Plocha ovšem nesmí být orientována tak, aby normála svírala se směrem $\vec{\omega}$ úhel větší než $\pi/2$. V takovém případě není směr $\vec{\omega}$ dosažitelný z vnější strany plochy a je $L = 0$.



Obrázek 3



Obrázek 4

Podél celého paprsku (kde nejsou překážky) naměříme stejnou hodnotu veličiny L. To znamená, že zvolíme-li bod $\vec{x}$ v paprsku a proložíme jím plochu P, která protíná paprsek v bodě $\vec{x}$, a dále jinde na paprsku volíme bod $\vec{x}'$ a proložíme jím plochu P', která rovněž protíná paprsek ve zvoleném bodě (obrázek 3), pak je $L(\vec{x}, \vec{\omega}) = L(\vec{x}', \pm\vec{\omega})$. Indexy L_i resp L_r a znaménko $+$ nebo $-$ je potřeba do rovnice doplnit podle toho, jak jsou orientovány plochy P a P' vzhledem ke směru paprsku $\vec{\omega}$.

Speciálně, nechť $\vec{x}$ a $\vec{x}'$ leží na tělesech s povrchem P a P' a tyto body jsou vzájmeně viditelné (obrázek 4). Nechť $\vec{\omega}$ je směr od $\vec{x}$ k $\vec{x}'$. Pak $L_r(\vec{x}, \vec{\omega}) = L_i(\vec{x}', -\vec{\omega})$.

Vztahy mezi radiometrickými veličinami

Radiometrické veličiny, které jsou zavedeny jako derivace podle plochy, času nebo prostorového úhlu jiných veličin, lze použít zpětně pro výpočet těchto jiných veličin integrováním. Viz též nesvětelný úvod: výpočet vzdálenosti D z rychlosti nebo výpočet hmotnosti z hustoty.

Protože je světelný tok Φ možno počítat z energie Q, formálně $\Phi = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ (podrobněji viz rovnice 1), platí

$$Q(S, \langle t_1, t_2 \rangle) = \int_{\langle t_1, t_2 \rangle} \Phi(S, t)\, \mathrm{d}t.$$

Protože je iradiance E počítána z příchozího toku Φ_i, formálně $E = \frac{\mathrm{d}\Phi_i}{\mathrm{d}S}$, a radiozita B z odchozího toku Φ_r, formálně $B = \frac{\mathrm{d}\Phi_r}{\mathrm{d}s}$ (podrobněji viz rovnice 2, 3), je

$$\Phi_i(S) = \int_S E(\vec{x})\, \mathrm{d}s, \qquad \Phi_r(S) = \int_S B(\vec{x})\, \mathrm{d}s.$$

Protože intenzitu záření plochy ve směru I_r je možno počítat z Φ_r, formálně $I_r = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\omega}$ (podrobněji viz rovnici 4), je

$$\Phi_r(S, U) = \int_U I_r(S, \omega)\, \mathrm{d}\vec{\omega}. \tag{6}$$

Protože radianci L_r je možno počítat z Φ_r, formálně $L_r = \frac{\mathrm{d}^2\Phi_r}{\cos\theta \mathrm{d}s \mathrm{d}\vec{\omega}}$ (podrobněji viz rovnici 5), je

$$\Phi_r(S, U) = \int_U \int_S L_r(\vec{x}, \vec{\omega}) \cos\theta\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\vec{\omega}.$$

Ve vnitřním integrálu se integruje podle proměnné $\vec{x}$ přes plochu S, přitom se mění i θ, což je úhel mezi (konstantním) směrem $\vec{\omega}$ a (proměnlivou) normálou plochy $\vec{n}_{\vec{x}}$ v bodě $\vec{x}$. Pokud na ploše S existují body $\vec{x}$, ze kterých směr $\vec{\omega}$ není dosažitelný vnější stranou plochy (tj. $\theta > \pi/2$), je samozřejmě $L_r(\vec{x}, \vec{\omega}) = 0$. Ve vnějším integrálu se integruje podle proměnné $\vec{\omega}$ přes množinu směrů. Podle Fubiniovy věty lze pořadí integrování obrátit, tedy

$$\Phi_r(S, U) = \int_S \int_U L_r(\vec{x}, \vec{\omega}) \cos\theta\, \mathrm{d}\vec{\omega}\, \mathrm{d}s.$$

Analogické vztahy platí pro L_i a Φ_i.

Veličina E (iradiance) zahrnuje energii přicházející ze všech směrů k danému bodu $\vec{x}$. Je-li bod $\vec{x}$ regulární bod plochy P, množina všech přípustných směrů, ze kterých je možno ozářit bod $\vec{x}$, tvoří hemisféru

$$\Omega_{\vec{x},P} = \{\vec{\omega};\ \text{úhel mezi } \vec{\omega} \text{ a normálou } \vec{n}_{\vec{x}} \text{ je menší než } \pi/2\}.$$

Takže v tomto případě lze E počítat jako integrál z L_i takto:

$$E(\vec{x}, P) = \int_{\Omega_{\vec{x},P}} L_i(\vec{x}, \vec{\omega}) \cos\theta\, \mathrm{d}\vec{\omega}.$$

V tomto integrále se rovněž mění θ, tentokrát kvůli tomu, že se mění $\vec{\omega}$, zatímco normála je konstantní.

Analogicky lze počítat B pomocí L_r jako

$$B(\vec{x}, P) = \int_{\Omega_{\vec{x},P}} L_r(\vec{x}, \vec{\omega}) \cos\theta\, \mathrm{d}\vec{\omega}.$$

Z těchto integrálů je znova vidět závislost veličin E a B na ploše P.

Je potřeba upozornit, že pro singulární body (například hrany nebo kouty) je možné použít přímo definici E resp. B, ale ne zde uvedené integrální vzorce. V singulárních bodech není totiž L definováno a také integrovaná množina není nutně hemisféra. Radiozitní metoda předpokládá B jako integrál přes hemisféru, tj. pracuje s veličinou B jen v regulárních bodech plochy. Přirozeně pak v singulárních bodech plochy (např. v koutech) tato metoda selhává.

Světelné zdroje

Výkon (power) světelného zdroje je $\Phi_r(P)$, kde P je plocha obklopující světelný zdroj (např. sféra) a měří se jen světelná energie pocházející ze světelného zdroje (tedy nikoli např. odražené světlo). Mezi zdrojem světla a obklopující plochou P nesmí být žádné překážky. Je zřejmé, že výkon zdroje nezávisí na volbě obklopující plochy P. Je rozumné za P volit povrch světelného zdroje a v případě bodového zdroje sféru se středem ve zdroji.

Zářivost zdroje (radiant intenzity) je $I_r(P, \omega)$, kde P je plocha obklopující světelný zdroj a ω je zvolený úhel. V případě **ideálního bodového zdroje** plocha P v daném směru ω září v jediném bodě (singularita) a zářivost $I_r(P, \omega)$ je pro všechny směry ω shodná a je rovna $I = \Phi_r(P)/4\pi$ (výkonu zdroje děleném plochou jednotkové koule). Tato rovnost je důsledkem rovnice (6):

$$\Phi_r(P) = \Phi_r(P, \Omega) = \int_\Omega I_r(P, \omega)\, \mathrm{d}\omega = \int_\Omega I\, \mathrm{d}\omega = I \int_\Omega \mathrm{d}\omega = I \cdot 4\pi.$$